Algorithmique II
Année 2006-2007

Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD 3
Initiation aux graphes

1 Réunion Mondaine

Un couple reçoit chez lui quatre autres couples. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois de la soirée, certaines personnes se serrent la main. À la fin de la soirée, l'hôte demande à chaque personne, y compris son épouse, combien elle a serré de mains. Il obtient des réponses toutes différentes. Sachant que l'on ne serre pas sa propre main ni celle de son conjoint :

a - combien l'hôte a-t-il serré de mains,

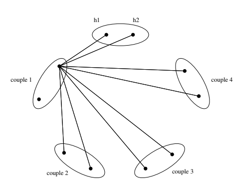
b - combien son épouse a-t-elle serrée de mains ?

Correction

On modélise la situation par un graphe (dingue ça !) : chaque personne est un sommet du graphe, deux sommets sont reliés par une arête si les personnes correspondantes se sont serrées la main. Puisqu'il y a dix personnes, chacune peut serrer huit mains au plus (pas la sienne ni celle de son conjoint). On a donc $\forall x \in V, 0 \leq d(x) \leq 8$.

Supposons que l'hôtesse ait serré 8 mains, ceci indique qu'elle aurait serré la main à chaque invité et aucun n'aurait pu répondre à l'hôte : «Je n'ai serré la main de personne». C'est donc un invité qui a serré huit mains. Comme la seule personne (autre que lui) à qui il ne serre pas la main est son conjoint, c'est ce conjoint qui n'a serré la main de personne.

On a donc



Continuons le raisonnement. Si l'hôtesse a serré 7 mains, c'est à un des deux conjoints du couple 1 et aux deux conjoints des couples 2,3 et 4. Aucun d'entre eux ne peut alors affirmer avoir serré une seule main. C'est donc l'un des conjoints du couple 2 qui a serré 7 mains, l'autre conjoint n'ayant serré qu'une seule main.

On continue et on obtient d(hôte)=d(hôtesse)=4.

2 Quelques propriétés sur les graphes

Exercice 2.1. Montrer que dans tout graphe $G = (V, E)$, il existe deux sommets de même degré. **Correction**

Soit $n = |V|$. Nous avons $\forall x \in V, 0 \leq d(x) \leq n-1$, soit n valeurs possibles pour $d(x)$. Si les n valeurs sont différentes alors $\exists x \in V, d(x) = 0$ et $\exists y \in V, d(y) = n-1$. Mais ceci est impossible car alors y est relié à tous les autres sommets donc à x d'où $d(x) > 0$.

Exercice 2.2. A quoi ressemble un graphe dont tous les sommets sont de degré 1 exactement ? de degré 2 exactement ? Si un graphe (non orienté) a n sommets, tous de degré k, que dire de nk ?

- *Degré 1 : constitué de composantes connexes de 2 éléments maximum*
- *Degré 2 : constitué de composantes connexes sous forme de chaînes cyclique*
- *Degré d : comptons le nombre d'arêtes : $\frac{nk}{2}$ (chaque arête est comptée 2 fois), donc nk est pair.*

Exercice 2.3. Quels sont les nombres entiers qui peuvent être l'ordre (i.e. nombre de sommets) d'un graphe k-régulier ? Construire de tels graphes. **Correction**

La condition $\sum_{x \in V} d(x)$ paire ($= 2m$, vraie dans tout graphe) impose :
- *si k est pair alors $n > k$;*
- *si k est impair alors n est pair et $n > k$.*

Montrons que ces conditions sont suffisantes :
- *si k est pair, on considère le graphe $G = (V, E)$ où $V = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, $n > k$ construit de la manière suivante.*
  Pour $0 \leq i \leq n-1$, on relie x_i à $x_{i-\frac{k}{2}}, x_{i-\frac{k}{2}+1}, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+\frac{k}{2}}$, les indices étant pris modulo n. On obtient bien un graphe k-régulier.
- *si k est impair. Si $n = k+1$, on prend le graphe complet. Si n pair et $n > k+1$, on construit le graphe $(k+1)$-régulier comme pour le cas pair ($k+1$ est pair) ensuite on supprime les arêtes $x_0x_1, x_2x_3, \ldots, x_{n-2}x_{n-1}$ et le tour est joué.*

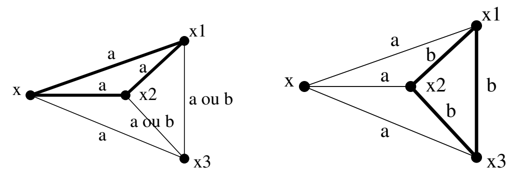
3 Petits problèmes...

Exercice 3

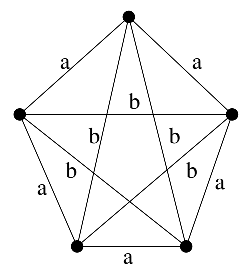
On colorie les arêtes d'un graphe complet d'ordre n, $n \geq 6$, avec deux couleurs. Montrer qu'il existe nécessairement un triangle monochromatique. Donner un contre-exemple à cette propriété avec $n = 5$.

Correction *Soit x un sommet du graphe, il a au moins cinq voisins. Si l'on colorie les arêtes incidentes à x avec deux couleurs a et b, il y aura au moins trois arêtes incidentes à x de la couleur majoritaire (disons a).*

Notons x_1, x_2 et x_3 les extrémités (autres que x) de ces arêtes. Si une arête x_ix_j $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,3\}$ a la couleur a alors $\{x, x_i, x_j\}$ est un triangle de couleur a, sinon $\{x_1, x_2, x_3\}$ est un triangle de couleur b.



Voici un contre-exemple de taille 5 :



Exercice 4

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.

- Montrer que deux chaînes élémentaires de longueur maximum ont un sommet en commun.
- Montrer que si G est un arbre toutes les chaînes de longueur maximum ont un sommet en commun.

Correction

a) Considérons deux chaînes élémentaires disjointes μ_1 et μ_2 de longueur maximale. Puisque G est connexe, il existe une chaîne élémentaire μ reliant un sommet x de μ_1 et un sommet y de μ_2, on choisit μ n'ayant que x et y en commun avec μ_1 et μ_2. C'est toujours possible puisqu'il existe une chaîne élémentaire μ' reliant un sommet x_1 de μ_1 à un sommet x_2 de μ_2 ; en notant $\mu' = (x_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, x_2)$ cette chaîne où x est le dernier sommet de μ_1 apparaissant dans μ' et y le premier sommet de μ_2 après x dans μ', la sous-chaîne $(x, \ldots, y)$ de μ' est la chaîne μ recherchée. Le sommet x partitionne μ_1 en deux sous-chaînes μ_1' et μ_1'' avec $lg(\mu_1') \leq lg(\mu_1'')$ tandis que le sommet y partitionne μ_2 en deux sous-chaînes μ_2' et μ_2'' avec $lg(\mu_2') \leq lg(\mu_2'')$; on suppose aussi $lg(\mu_1') \leq lg(\mu_2')$. Alors $\mu_2'\mu\mu_1''$ est une chaîne élémentaire vérifiant : $lg(\mu_2'\mu\mu_1'') = lg(\mu_2') + lg(\mu) + lg(\mu_1'') \geq lg(\mu_1') + 1 + lg(\mu_1'') > lg(\mu_1)$. Une contradiction.

b) La propriété est vraie si G n'admet qu'une ou deux chaînes de longueur maxi-

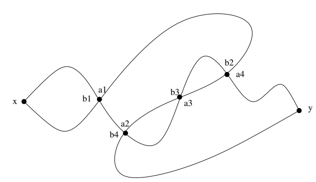
mum d'après le a). Supposons par récurrence que la propriété est vraie pour k chaînes. Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble de $k+1$ chaînes μ_i, $0 \leq i \leq k$ de longueur maximum tel que l'intersection des μ_i soit vide. Alors μ_0 intersecte toutes les autres chaînes en dehors de $\bigcap_{1 \leq i \leq k} \mu_i$. Soit alors $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} \mu_i$, $y \in \mu_0 \cap \mu_1$. Ces 2 points existent et sont distincts d'après le a) et nos suppositions. De plus, il existe μ_j tel que $y \notin \mu_0 \cap \mu_j$ car sinon l'intersection des μ_i contient y et n'est pas vide. Soit $z \in \mu_0 \cap \mu_j$, on a alors un cycle passant par x,y et z de la manière suivante ; on part de x vers y en suivant μ_1, puis on va de y à z en passant par μ_0 et enfin on retourne à x en passant par μ_j. Encore une contradiction.

Exercice 5

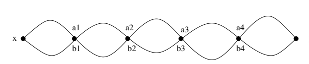
On suppose qu'il existe deux chaînes disjointes (au sens des arêtes) entre deux sommets x et y. Montrer qu'il existe deux chaînes arêtes-disjointes μ_1 et μ_2 entre x et y qui vérifient la condition suivante. Si on note $a_1, a_2, \ldots, a_p$ (resp. $b_1, b_2, \ldots, b_p$) l'ordre sur μ_1 (resp. sur μ_2) en allant de x vers y des sommets de $\mu_1 \cap \mu_2$ alors $a_i = b_i$, $\forall\ 1 \leq i \leq p$.

Correction

On veut montrer que si



alors il existe



Considérons deux chaînes arêtes-disjointes μ_1 et μ_2 connectant x à y et telles que $lg(\mu_1)+lg(\mu_2)$ soit minimal, alors μ_1 et μ_2 vérifient la propriété demandée. Supposons le contraire. Soit k le plus petit indice tel que $a_k \neq b_k$, $\exists l > k$ tel que $a_l = b_k$ et $\exists m > k$ tel que $b_m = a_k$.

μ_1 : $x \ldots a_1 \ldots a_2 \ldots a_{k-1} \ldots a_k \ldots a_l \ldots y$

μ_2 : $x \ldots b_1 \ldots b_2 \ldots b_{k-1} \ldots b_k \ldots b_m \ldots y$

On considère $\mu'_1 = x \ldots a_k = b_m \ldots y$ et $\mu'_2 = x \ldots b_k = a_l \ldots y$. μ'_1 et μ'_2 connectent x à y et n'ont pas d'arêtes communes. D'autre part $lg(\mu'_1)+lg(\mu'_2) <$

$lg(\mu_1) + lg(\mu_2)$ car la portion de μ_1 entre a_k et a_l contient au moins une arête et n'apparaît pas dans $\mu'_1 \cup \mu'_2$. On a une contradiction avec $lg(\mu_1) + lg(\mu_2)$ minimum.

Exercice 6

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $|V| = 2n$ et $|E| = m$. Montrer que si G ne contient pas de cycle de longueur 3 alors $m \leq n^2$.

Correction

Preuve par récurrence sur n. La propriété est vraie si $n = 1$.

Si $n > 1$.

- *Si G n'a pas d'arêtes, la propriété est vérifiée.*
- *Si G a au moins une arête xy, considérons le sous-graphe G' de G engendré par $V \backslash \{x, y\}$. On a $m(G) = m(G') + |N(x)\backslash\{y\}| + |N(y)\backslash\{x\}| + 1$.*
  Or $(N(x)\backslash\{y\}) \cap (N(y)\backslash\{x\}) = \emptyset$ car il n'y a pas de triangle.
  Donc $|N(x)\backslash\{y\}| + |N(y)\backslash\{x\}| = |(N(x)\backslash\{y\}) \cup (N(y)\backslash\{x\})| \leq |G'| = 2(n-1)$.
  Par hypothèse de récurrence, $m(G') \leq (n-1)^2$ donc on obtient
  $m(G) \leq (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = n^2$. CQFD

Exercice 7

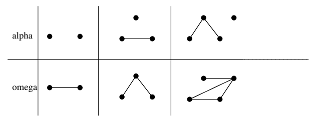
Pour $n \geq 2$, montrer qu'il existe exactement deux graphes à n sommets ayant un unique couple de sommets de même degré. On donnera un procédé de construction.

Correction

Preuve par récurrence. Soit G un graphe de taille n. Les degrés de ses sommets sont répartis entre 0 et $n-1$. Mais on ne peut pas avoir en même temps un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n-1$. Hypothèse de récurrence : il existe un unique graphe $\alpha(n)$ à n sommets ayant un unique couple de sommets de même degré dont les degrés varient dans l'intervalle $[0, \ldots, n-2]$ et il existe un unique graphe $\omega(n)$ à n sommets ayant un unique couple de sommets de même degré dont les degrés varient dans l'intervalle $[1, \ldots, n-1]$.

La propriété est vraie pour $n = 2$.

Comme la propriété d'avoir un unique couple de sommets de même degré est stable par passage au complémentaire, on se restreint à l'étude du cas où les degrés des sommets sont répartis entre 1 et $n-1$. On a alors $n-1$ tiroirs pour n chaussettes et un unique couple de chaussettes dans le même tiroir donc aucun des tiroirs n'est vide. De plus, il ne peut pas y avoir deux sommets de degré $n-1$ sinon il n'y aurait pas de sommet de degré 1. On retire ce sommet de degré $n-1$ et on obtient un graphe de taille $n-1$ dont les degrés varient entre 0 et $n-3$ (le sommet de degré $n-1$ a disparu, le ou les sommets de degré $n-2$ sont devenus des sommets de degré $n-3$). On applique alors l'hypothèse



de récurrence qui nous affirme qu'il existe un unique graphe à $n-1$ sommets ayant un unique couple de sommets de même degré dont les degrés varient dans l'intervalle $[0,\ldots,n-3]$. En raisonnant de même sur le complémentaire, on prouve que la propriété est vérifiée.

On déduit directement de la preuve le procédé de construction suivant. On obtient $\alpha(n+1)$ en ajoutant un sommet relié à rien au graphe $\omega(n)$ et on obtient $\omega(n+1)$ en ajoutant un sommet relié à tous les autres au graphe $\alpha(n)$.